Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.
Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;20]$ par : $f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$.

On donne ci-contre le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. **a.** On trouve à la calculatrice que $f(20) \approx 0{,}031$.
   b. Le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est $f(1{,}75) \approx 0{,}697$ ce qui correspond à 69,7 %.

2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %, c'est-à-dire 0,035.
   a. On complète le tableau des variations de f en plaçant la valeur 0,035 :

t	0		1,75		T		20
f	0,23	↗	$\approx 0{,}687$	↘	0,035	↘	$\approx 0{,}031$

   D'après ce tableau, il n'existe qu'un instant T pour lequel $V = 0{,}035$.
   De plus, $V \leqslant 0{,}035$ pour tout t de l'intervalle $[T\,;20]$.
   b. On considère l'algorithme suivant :

$t \leftarrow 1{,}75$
$p \leftarrow 0{,}1$
$V \leftarrow 0{,}7$
Tant que $V > 0{,}035$
    $t \leftarrow t + p$
    $V \leftarrow (0{,}8t + 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$
Fin Tant que

Par approximations successives, on trouve $f(15{,}65) \approx 0{,}0351 > 0{,}035$ et $f(15{,}75) \approx 0{,}0349 < 0{,}035$; donc la valeur de t en sortie d'algorithme est 15,75.

15,75 est une valeur approchée du temps exprimé en minutes à partir duquel le taux de CO_2 sera inférieur à 3,5 % ; ce temps est donc de 15 minutes et 45 secondes.

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 11]$ par : $F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03t$.

La foncttion F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 11]$ et

$$F'(t) = (-1{,}6) \times \mathrm{e}^{-0{,}5t} + (-1{,}6t - 3{,}6) \times (-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03 = (-1{,}6 + 0{,}8t + 1{,}8)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$$
$$= (0{,}8t + 0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03 = f(t).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0 ; 11]$.

b. La valeur moyenne V_m de la fonction f sur l'intervalle $[0; 11]$ est

$$\frac{1}{11-0}\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{11}\left[F(11) - F(0)\right] = \frac{1}{11}\left[\left((-17{,}6 - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-5{,}5} + 0{,}33\right) - (-3{,}6)\right] \approx 0{,}349.$$

Le taux moyen de CO_2 pendant les 11 premières minutes est d'environ 34,9 %.